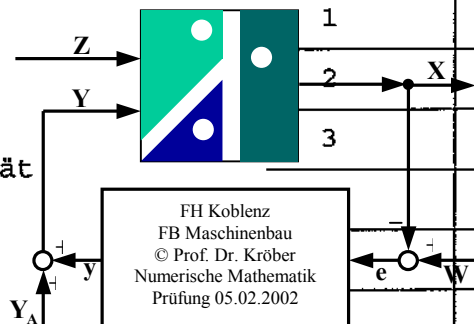


Zur Bewertung der Aufgaben muss der gesamte Lösungsweg ersichtlich sein.

- Bearbeitungszeit : 90 min

- Erlaubte Hilfsmittel :

- Schreib- und Zeichengerät
- Taschenrechner
- Literatur, Kopien
- Vorlesungsmitschrift



Note : _____

Aufgabe	erreichte Punkte
1	
2	
3	
7	
Summe	

x Lösungen

Aufgabe 1 (20 P)

Die folgende Funktion ist näher zu untersuchen.

$$y = x \cdot e^{-x}$$

- a. Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an und schätzen Sie die Fläche unter der Kurve im Intervall $0 \leq x \leq 6$!

$$A = \int_0^6 x \cdot e^{-x} dx = ?$$

- b. Bestimmen Sie die Fläche mit der Simpson'schen Regel (Stützstellenabstand sei $h=1$) !
 c. Bestimmen Sie den exakten Wert der Fläche!

$$\text{Hilfestellung: } \int x \cdot e^{-x} dx = -e^{-x} \cdot (1+x) + C$$

- d. Zur Erzielung einer höheren Genauigkeit müsste der Stützstellenabstand verringert werden. Welcher Bereich der Kurve erfordert dies im besonderen Maße?

Aufgabe 2 (16 P)

Die Funktion aus Aufgabe 1 ($y = x \cdot e^{-x}$) soll im Bereich $[0, 6]$ tabelliert werden. Der Abstand von Stützstelle zu Stützstelle beträgt hier $h=0,1$. Bestimmen Sie eine obere Schranke für den zu erwartenden Fehler, wenn zwischen den Stützstellen linear interpoliert wird!

Aufgabe 3 (6 P)

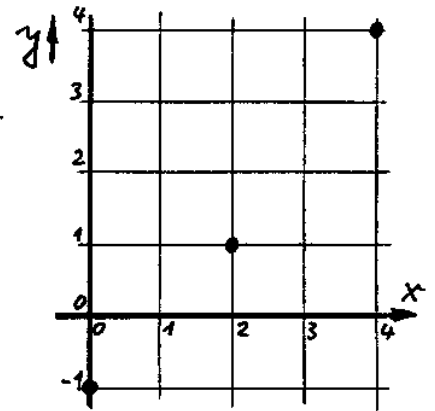
Für die Funktion $y = f(x) = \sin(x) \cdot \sqrt{x}$ ist die erste und zweite Ableitung an der Stelle $x=1$ zu bestimmen (Rechnung mit "numerischer Mathematik"). Hierbei sei $\Delta x = 0,05$.
 Bemerkung: Auf "Bogenmaß" achten !

Aufgabe 4 (14 P)

Für die 3 skizzierten Wertepaare soll mit der Interpolationsformel von Lagrange der Funktionswert an der Stelle $x=3$ bestimmt werden (Parabelansatz).

Zusatzfrage:

Wie ändert sich der Funktionswert an der Stelle $x=3$, wenn sich der Stützstellenwert $y_1=1$ um $\pm 0,1$ verändert?



Aufgabe 5 (14 P)

Die folgende Gleichung besitzt eine Lösung.

$$2\sqrt{x} = 2 - \frac{1}{2}x$$

- Fertigen Sie eine Skizze an und bestimmen Sie einen Schätzwert für die Lösung!
- Prüfen Sie die beiden möglichen Schrittfunktionen hinsichtlich ihrer Konvergenzeigenschaften!
- Führen Sie 4 Iterationsschritte durch mit dem Startwert $x^{(0)}=1$!

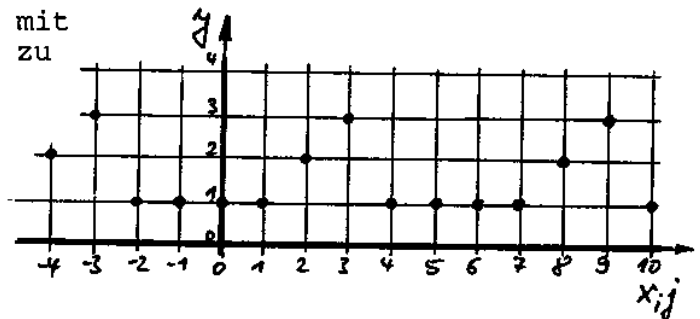
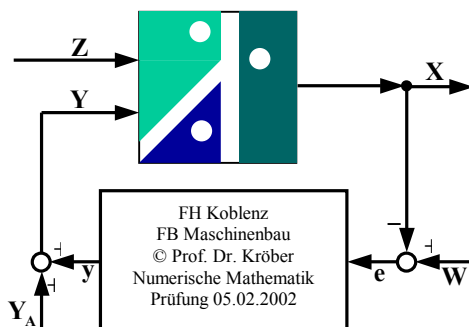
Aufgabe 6 (16 P)

Für eine größere Anzahl von Wertepaaren $[x_i, y_i]$ sollen für den Ansatz $y = a + b \cdot \ln(x+c)$ die Ansatzfreiwerte a , b und c bestimmt werden. Über den Ansatz "Minimum Fehlerquadrate" erhält man 3 Gleichungen mit den 3 Unbekannten a , b und c . Bestimmen Sie diese 3 Gleichungen! Können Sie (in Worten) eine Lösungsstrategie zur Lösung dieses Gleichungssystems angeben?

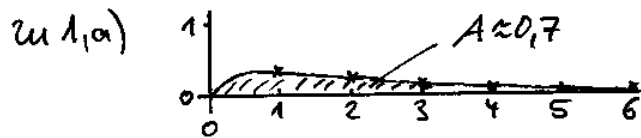
Aufgabe 7 (14 P)

Für die gegebenen Wertepaare sind mit der Fourieranalyse folgende Werte zu bestimmen:

$$\frac{a_0}{2}, a_1, b_1, A_1, \varphi_{01}$$



Prüfung Numerische Mathematik vom S.2.02 / Blatt 1



b) $Q = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$

$$= \frac{1}{3} (0 + 4 \cdot 0,3679 + 2 \cdot 0,2707 + 4 \cdot 0,1494 + 2 \cdot 0,0733 + 4 \cdot 0,0337 + 0,0149)$$

$$= \underline{\underline{0,9690}}$$

c) $\underline{A} = \int_0^6 x e^{-x} dx = [-e^{-x}(1+x)]_0^6 = -e^{-6}(1+6) + e^{-0}(1+0) = \underline{\underline{0,9826}}$

d) im Bereich 0,1(2) ; weil dort Krümmung groß

zu 2) $R(x) = \frac{1}{2!} f''(\xi) [(x-x_0)(x-x_1)] ; \xi \in [x_0, x_1]$

$$f(x) = x e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x} + x(-1)e^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$$f''(x) = -e^{-x} - (e^{-x} + x(-1)e^{-x}) = -e^{-x} - e^{-x} + x e^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

x	0	1	2	3	$\rightarrow \infty$
f''	-2	-0,3679	0	0,0498	$\rightarrow 0$

$$\Rightarrow \max |f''| = 2$$

also:

$$|R(x)| \leq \frac{1}{2!} \cdot 2 \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h^2}{4} = \frac{0,1^2}{4} = \underline{\underline{0,0025}}$$

zu 3)

$$x_0 = 0,95 ; f(x_0) = y_0 = 0,792819$$

$$x_1 = 1,0 ; f(x_1) = y_1 = 0,841471$$

$$x_2 = 1,05 ; f(x_2) = y_2 = 0,888844$$

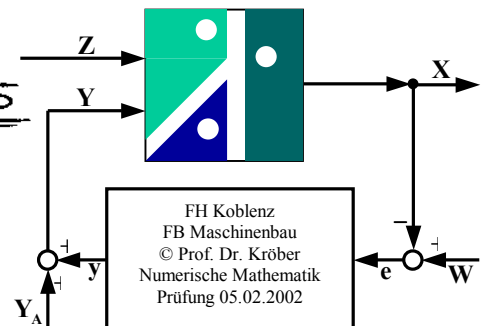
$$\underline{y}' = \frac{y_2 - y_0}{2 \cdot \Delta x} = \frac{0,888844 - 0,792819}{2 \cdot 0,05} = \underline{\underline{0,9603}}$$

$$\underline{y}'' = \frac{y_2 + y_0 - 2y_1}{\Delta x^2} = \frac{0,888844 + 0,792819 - 2 \cdot 0,841471}{0,05^2} = \underline{\underline{-0,5116}}$$

zu 4)

$$y = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} + y_2 \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

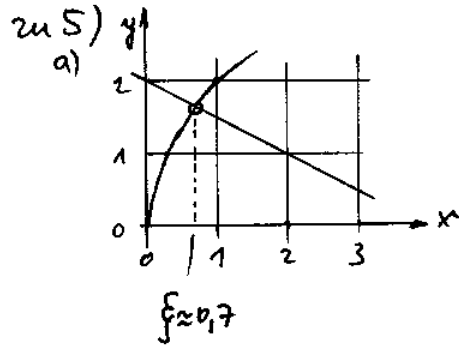
$$= y_0 \frac{3-2}{0-2} \cdot \frac{3-4}{0-4} + y_1 \frac{3-0}{2-0} \cdot \frac{3-4}{2-4} + y_2 \frac{3-0}{4-0} \cdot \frac{3-2}{4-2}$$



Prüfung Numerische Mathematik vom 5.2.02 / Blatt 2

andere 4.) $y = -\frac{1}{8}y_0 + \frac{3}{4}y_1 + \frac{3}{8}y_2 = -\frac{1}{8}(-1) + \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 4 = \frac{19}{8} \approx 2,375$

$y_1 \rightarrow \pm 0,1 \Rightarrow \Delta y = \frac{3}{4}(\pm 0,1) = \pm 0,075$ ($y \rightarrow \begin{matrix} 2,450 \\ 2,300 \end{matrix}$)



b) $2\sqrt{x} = 2 - \frac{1}{2}x$

$\sqrt{x} = 1 - \frac{1}{4}x$

$x = (1 - \frac{1}{4}x)^2 = \varphi_1(x)$

$\varphi_1'(x) = 2(1 - \frac{1}{4}x)(-\frac{1}{4})$

$= -\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4}x)$

$\varphi_1'(0,7) = -0,4125$

$\rightarrow$ alternierend Konv.

$\frac{1}{2}x = 2 - 2\sqrt{x}$

$x = 4(1 - \sqrt{x}) = \varphi_2(x)$

$\varphi_2'(x) = 4(-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= -\frac{2}{\sqrt{x}}$

$\varphi_2'(0,7) = -2,39$

$\rightarrow$ alternierend divergent

c) $x^{(0)} = 1; x^{(1)} = (1 - \frac{1}{4} \cdot 1)^2 = 0,5625; x^{(2)} = (1 - \frac{1}{4} \cdot 0,5625)^2 = 0,7385$

$x^{(3)} = \dots = 0,6648; x^{(4)} = \dots = 0,6952$

zu 6) $\phi = \sum \varphi_i^2 = \sum (y_i - a - b \cdot \ln(x_i + c))^2$

$\frac{\partial \phi}{\partial a} = 2 \cdot \sum (...) \cdot (-1) \Rightarrow \dots \Rightarrow \underline{\underline{\sum y_i - n a - b \sum \ln(x_i + c) = 0}}$

$\frac{\partial \phi}{\partial b} = 2 \cdot \sum (...) \cdot (-1) \ln(x_i + c) \Rightarrow \dots \Rightarrow \underline{\underline{\sum y_i \ln(x_i + c) - a \sum \ln(x_i + c) - b \sum \ln^2(x_i + c) = 0}}$

$\frac{\partial \phi}{\partial c} = 2 \cdot \sum (...) \cdot (-1) \cdot b \cdot \frac{1}{x_i + c} = -2b \sum (...) \frac{1}{x_i + c}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\sum \frac{y_i}{x_i + c} - a \sum \frac{1}{x_i + c} - b \sum \frac{\ln(x_i + c)}{x_i + c} = 0}}$

zu 7) $n = 6$

$\underline{\underline{a_0 = \frac{1}{6}(1+1+2+3+1+1) = \frac{3}{2} = 1,5}}$

$\underline{\underline{a_1 = \frac{2}{6}[1 \cdot \cos 0^\circ + 1 \cdot \cos 60^\circ + 2 \cdot \cos 120^\circ + 3 \cdot \cos 180^\circ + 1 \cdot \cos 240^\circ + 1 \cdot \cos 300^\circ]} = -\frac{5}{6} \approx -0,833 \dots$

$\underline{\underline{b_1 = \frac{2}{6}[1 \cdot \sin 0^\circ + 1 \cdot \sin 60^\circ + 2 \cdot \sin 120^\circ + 3 \cdot \sin 180^\circ + 1 \cdot \sin 240^\circ + 1 \cdot \sin 300^\circ]} = \frac{1}{6}\sqrt{3} \approx 0,2887$

$\underline{\underline{A_1 = \sqrt{(-0,8333)^2 + (0,2887)^2} = 0,8819}}$

